

# El modelo de Black, Derman y Toy en la práctica. Aplicación al mercado español de deuda pública

Marta Tolentino García-Abadillo • Antonio Díaz Pérez<sup>1</sup>

Universidad de Castilla-La Mancha

RECIBIDO: 18 de abril de 2005

ACEPTADO: 8 de febrero de 2006

**Resumen:** El modelo de Black, Derman y Toy –BDT– (1990) se engloba dentro de los modelos consistentes con la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), siendo uno de los más utilizados por la industria para la valoración de activos derivados de renta fija. Estos modelos replican con precisión la ETTI observada en el mercado en el momento de su calibración. No obstante, el más leve movimiento en los tipos de interés implica que el modelo deja de estar calibrado. En este trabajo analizamos el momento adecuado para recalibrar el modelo en función del tipo de movimiento producido en los tipos de interés. El estudio se realiza a partir de operaciones de compraventa simple al contado con bonos del Estado negociados en el mercado de deuda pública anotada. Observamos que el uso del modelo BDT sin recalibrar es aceptable durante periodos más dilatados de tiempo cuanto menor es el nivel y la pendiente de la ETTI inicial y mayor es su curvatura y la volatilidad histórica, así como cuando los movimientos de los tipos de interés con respecto al momento de la calibración conducen a un aplanamiento de la ETTI.

**Palabras clave:** Estructura temporal de los tipos de interés / Valoración / BDT / Calibración.

## **The Black, Derman and Toy Model. Implementation in the Spanish Treasury Debt Market**

**Abstract:** In the pricing of interest rate derivatives, the Black, Derman and Toy model (1990) is one of the most popular term structure models for the financial industry. When calibrated this type of model is able to accurately reproduce all market prices. A slight drift of the yield curve implies that the model has become decalibrated. Using daily data on actual transaction prices of the Treasury bonds traded on the Bank of Spain's book entry system, we analyse the accurate time when the model should be recalibrated depending on the yield curve movement. We observe that a non-recalibrated BDT model can be used for longer when the level and the slope of the initial yield curve are lower, the curvature and the historic volatility are higher and interest rate movements lead to a flatter yield curve.

**Key Words:** Term structure of interest rates / Pricing / BDT / Calibration.

## INTRODUCCIÓN

La estructura temporal de tipos de interés (ETTI) o curva cupón cero es una función que relaciona los tipos de interés al contado de títulos cupón cero libres de riesgo de insolvencia con sus vencimientos correspondientes. Los modelos que estiman la curva cupón cero parten habitualmente de los precios observados de títulos de renta fija emitidos por el Estado<sup>2</sup>. Estas estimaciones se utilizan para varias propuestas, como son la valoración de estos activos financieros y el diseño de estrategias de inversión o de cobertura; además son útiles en el ámbito de la teoría económica, como por ejemplo en el estudio de la formación de expectativas y en el ámbito de la política monetaria.

Sin embargo, estas estimaciones no permiten valorar activos más complejos, como son los activos derivados de renta fija. Algunos de los flujos de dinero de estos activos derivados dependen del nivel futuro de los tipos de interés, el cual se desconoce en el momento de la valoración. Este tipo de valoración requiere de hipótesis específicas sobre la evolución futura de los

tipos de interés. Para valorar derivados se necesita modelizar la dinámica de la ETTI<sup>3</sup>.

En la literatura existen dos aproximaciones distintas para replicar la dinámica de la evolución de los tipos de interés: el equilibrio y la ausencia de oportunidades de arbitraje. Ambos métodos tienen una estructura similar, partiendo siempre de una ecuación diferencial estocástica de los tipos de interés. La distinción entre ellos procede del *input* que se utiliza para calibrar los parámetros del modelo. Los modelos de equilibrio, entre los que se enmarcan los propuestos por Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), especifican explícitamente la prima de riesgo del mercado. Los parámetros del modelo se estiman estáticamente a partir de datos históricos y se supone que son constantes en el tiempo.

Los modelos consistentes, o de no arbitraje, ajustan el precio de mercado de los activos subyacentes con el precio que proporciona el modelo. Algunos de estos modelos son los propuestos por Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black, Derman y Toy (1990), Black y Karasinski (1991) y Heath, Jarrow y Morton (1992). Esta

aproximación es la preferida por los profesionales para valorar los derivados de tipos de interés, ya que están asegurando que los precios de mercado de los bonos, a partir de los cuales se obtienen los precios de los derivados suponiendo ausencia de oportunidades de arbitraje, coinciden con los proporcionados por el modelo en el momento de calibración. En cambio, los modelos de equilibrio no valoran con exactitud dichos bonos.

Un amplio número de trabajos empíricos analizan la validez de estos modelos de tipo de interés a la hora de valorar activos financieros de renta fija<sup>4</sup>. Entre estos podemos encontrar el trabajo de Navas (1999) para el mercado español, los de Moraleda y Pelsser (2000) y Buetow, Hanke y Fabozzi (2001) para el mercado estadounidense, y el de Bühler *et al.* (1999) para el mercado alemán. En todos ellos se llega a la conclusión de que los modelos consistentes son los que mejor ajustan los precios de mercado de los activos objeto de análisis.

Uno de los modelos consistentes con la ETTI más popular en la literatura es el modelo de Black, Derman y Toy –BDT– (1990). En este sentido, trabajos empíricos recientes analizan la implementación del BDT. Por ejemplo, Bali y Karagozoglu (1999) examina el efecto del método de estimación de la volatilidad, utilizada como *input* del modelo, concluyendo que los estimadores con base en series temporales son los que permiten valorar opciones sobre tipos de interés con mayor precisión. Por su parte, Boyle, Tan y Tian (2001) observan cómo la práctica habitual consistente en introducir como *input* las volatilidades de los tipos de interés a corto, en lugar de las volatilidades de las TIR, tiene ventajas teóricas y prácticas en el ajuste del modelo.

Al mismo tiempo, el modelo BDT, al igual que otros modelos consistentes, es muy sencillo, se basa en una idea simple e intuitiva, y es de fácil calibración, pero, a diferencia del resto de modelos, el modelo BDT ha llegado a ser prácticamente un estándar para la industria<sup>5</sup>. Por tanto, nuestro análisis se centra en este modelo.

El objetivo principal de nuestro trabajo consiste en analizar de qué factores depende la frecuencia con la que es necesario recalibrar el modelo para que éste valore con una precisión aceptable bonos cupón cero y con cupón periódico

con distintos plazos hasta el vencimiento<sup>6</sup>. El modelo BDT, por construcción, replica con total exactitud la ETTI observada en el momento de calibración. Esta ETTI contiene toda la información del mercado. Instantes después, un leve movimiento en los precios de los bonos utilizados en la estimación de la ETTI implica una variación en los tipos de interés y en la forma de la ETTI, por lo que el modelo BDT deja de estar calibrado. Una nueva calibración será necesaria para que el modelo vuelva a ajustar exactamente la nueva estructura temporal. Esta circunstancia es la principal crítica de este tipo de modelos.

Es obvio que se puede mantener una correspondencia perfecta entre la ETTI estimada y los parámetros del modelo BDT si lo recalibramos cada segundo o cada vez que el precio de un bono varía ligeramente. No obstante, esta secuencia de recalibraciones implica costes para los gestores, costes que en determinadas circunstancias pueden ser innecesarios. Dependiendo del tipo de activos a valorar con el modelo BDT y el objetivo de dicha valoración, podemos tolerar una ligera pérdida de precisión. Nuestro estudio intenta discriminar entre los movimientos de la ETTI que implican una pérdida de precisión tolerable de aquellos que requieren de una nueva calibración de los parámetros del modelo BDT.

Este análisis se podría enfocar mediante un problema de simulación (Boyle, Tan y Tian, 2001), pero preferimos examinar formas iniciales reales de la ETTI y movimientos factibles de los tipos de interés respecto de éstas<sup>7</sup>. Así, calibramos el modelo BDT a partir de la estimación diaria de la ETTI con datos del mercado español de deuda pública anotada durante dos periodos muestrales distintos, 1998 y 2001. Dicho mercado ha sido objeto de pocos trabajos empíricos con modelos consistentes con la ETTI<sup>8</sup>. En este trabajo implementamos la versión del modelo BDT con volatilidad dependiente del plazo, de forma que se introducen estimaciones de la volatilidad histórica para cada uno de los plazos considerados.

Las diferencias observadas en los errores de valoración por la falta de calibración del modelo entre los dos periodos muestrales analizados nos llevan a contrastar la sensibilidad de los errores a cambios en los tres factores determinantes de la

forma de la ETTI, esto es, nivel, pendiente y curvatura.

Con todo lo anterior, nuestra principal aportación consiste en analizar, en primer lugar, los errores originados por la utilización del modelo en la valoración de bonos en sesiones posteriores a su calibración y, por otra parte, los factores que influyen en la cuantía y evolución de los mismos. De esta forma, pretendemos determinar la frecuencia o el tipo de movimiento de la ETTI para los cuales es posible mantener la calibración inicial del modelo.

Este trabajo se organiza como sigue. En el segundo apartado se describe brevemente el modelo BDT. El apartado tercero se explica la forma de implementación a partir de la muestra de datos, se explica el procedimiento utilizado en la estimación de los errores de valoración, y se analizan los resultados obtenidos. En el apartado cuarto se propone el modelo para determinar los factores explicativos del comportamiento de los errores de valoración y se comentan los resultados. Finalmente, destacamos las principales conclusiones.

## EL MODELO DE BLACK, DERMAN Y TOY (1990)

El modelo BDT (1990) parte de tres hipótesis básicas. Primera, el tipo de interés a corto anualizado es la única variable que determina los precios de todos los activos; los tantos de rendimiento de todos los bonos están perfectamente correlacionados, dado que se considera que es un único factor el que determina la dinámica de los mismos; el tipo a corto se distribuye como una lognormal en cualquier momento del tiempo. Segunda, estamos en un mundo neutral al riesgo; no existen impuestos ni costes de transacción en el mercado. Tercera, los *inputs* del modelo son la curva de tipos cupón cero o ETTI y la estructura temporal de volatilidades de estos activos cupón cero.

La implementación del modelo BDT se realiza a partir de la construcción de un árbol binomial para el tipo de interés a corto que sea consistente con la estructura temporal de los tipos de interés y con la estructura temporal de volatilidades. Para construir el árbol de forma eficiente,

se sigue el proceso de inducción *forward* desarrollado por Jamshidian (1991) que muestra que el nivel del tipo de interés en el momento  $t$  viene dado por la expresión

$$r(t) = U(t) \exp(\sigma(t)z(t)) \quad (1)$$

donde  $U(t)$  es la mediana de la distribución lognormal de  $r$  en el momento  $t$ ,  $\sigma(t)$  se define como la volatilidad del tipo a corto y  $z(t)$  representa el movimiento browniano geométrico, es decir, es la parte de la ecuación que define el movimiento estocástico del tipo de interés.

Para ajustar el modelo a las curvas de interés y de volatilidad, o lo que es igual, para calibrar el modelo, habrá que determinar  $U(t)$  y  $\sigma(t)$ , los parámetros del modelo, para cada intervalo del árbol binomial. Así, el valor del tipo de interés en cada nodo del árbol binomial se determina a partir de la expresión que rige la dinámica del tipo de interés a corto

$$r_{i,j} = U(i) \exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}) \quad (2)$$

donde  $r_{i,j}$  es el tipo de interés correspondiente al nodo  $(i, j)$ .

Las probabilidades de que se produzca un movimiento al alza o a la baja asociadas a cada nodo son las probabilidades neutrales al riesgo y son iguales a 0,5. Con el fin de determinar las funciones  $U(i)$  y  $\sigma(i)$  se utilizan los precios de estado.  $Q_{i,j}$  es el precio de estado para el momento  $i$  y el estado  $j$  y representa el valor, en el momento actual o momento 0, de un activo que paga 1 unidad monetaria si se alcanza el nodo  $(i, j)$  y 0 en cualquier otro caso. Por definición  $Q_{0,0}=1$ . A partir de los precios de estado se puede valorar cualquier activo financiero.

En concreto, se puede expresar el precio en el momento 0 de un bono emitido al descuento, libre de riesgo de insolvencia y de liquidez, con valor nominal igual a una unidad monetaria y con vencimiento en  $(i+1)\Delta t$ , en función de los precios de estado de la forma siguiente

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i+1,j} \quad (3)$$

Por otro lado, el factor de descuento asociado al nodo  $(i, j)$ ,  $d(i, j)$ , representa el valor en el

momento del tiempo  $i$  de una unidad monetaria con vencimiento en el momento  $i + 1$  si se da el estado de la naturaleza  $j$

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + r_{i,j}\Delta t} \quad (4)$$

El procedimiento de inducción *forward* consiste en acumular los precios de estado a la vez que avanzamos por el árbol. Este proceso y la valoración neutral al riesgo permiten determinar el árbol de precios de estado. En concreto, la expresión del precio de un activo puro en el momento  $i$  y estado  $j$  se obtiene a partir de los valores conocidos para el momento  $i-1$  basándose en la expresión

$$Q_{i,j} = 0,5Q_{i-1,j-1}d_{i-1,j-1} + 0,5Q_{i-1,j+1}d_{i-1,j+1} \quad (5)$$

En el momento 0 nos encontramos en condiciones de certeza, es decir, conocemos el tipo de interés vigente para los distintos vencimientos. Conociendo  $r_{0,0}$  el siguiente paso consiste en extender el árbol un periodo. Si sustituimos las expresiones (2), (4) y (5) en la (3) obtenemos la expresión siguiente para el precio de los bonos,

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i,j} d_{i,j} = \sum_j Q_{i,j} \frac{1}{1 + r_{i,j}\Delta t} = \sum_j Q_{i,j} \frac{1}{1 + U(i) \exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t})\Delta t} \quad (6)$$

Los parámetros  $U(i)$  y  $\sigma(i)$  deben estimarse de forma simultánea. Para ello es necesario construir dos árboles de precios de estado, cada uno de los cuales permitirá determinar los valores de  $P_U(i)$  y  $P_D(i)$ , que representan una subida ( $U$ ) o bajada ( $D$ ) en el precio del bono respecto al periodo anterior, motivadas por un descenso o incremento en el tipo de interés.  $R_U(i)$  y  $R_D(i)$  son los correspondientes tantos de rendimiento para cada uno de los bonos, calculados como tantos de interés efectivos compuestos continuos, según la siguiente ecuación

$$R(i) = -\frac{1}{i} \ln P(i) \quad (7)$$

Así, para que el árbol del tipo de interés se construya de forma que se ajuste perfectamente a

la estructura temporal de tipos de interés inicial y la estructura de volatilidades,  $P_U(i)$  y  $P_D(i)$  deben ser consistentes con los valores conocidos de  $P(i)$  y  $\sigma_R(i)$ , donde  $\sigma_R(i)$  es la volatilidad de los tasas internas de rentabilidad de los bonos.

La relación entre la función conocida,  $P(i)$ , y las funciones que hay que determinar  $P_U(i)$  y  $P_D(i)$ , viene dada por la ecuación de valoración libre de arbitraje, que incorpora las probabilidades neutrales al riesgo

$$\frac{1}{1 + r_{0,0}\Delta t} [0,5P_U(i) + 0,5P_D(i)] = P(i) \quad (8)$$

$i = 2, \dots, N$

Por tratarse de un modelo lognormal, las volatilidades de los tantos de rendimiento deben satisfacer la siguiente relación

$$\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t} = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln P_U(i)}{\ln P_D(i)} \quad (9)$$

Despejando  $P_D(i)$  de la expresión anterior

$$P_D(i) = P_U(i) \exp(-2\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t}) \quad (10)$$

y sustituyendo (9) en la ecuación (8) obtenemos la relación que permitirá determinar las funciones de descuento, la cual presenta la forma siguiente

$$P_U(i) + P_U(i) \exp(-2\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t}) = 2P(i)(1 + r_{0,0}\Delta t) \quad (11)$$

Una vez que conocemos el conjunto de variables y relaciones que permiten calibrar e implementar el modelo, será necesario seguir una serie de etapas con este fin. Primero calculamos los valores para  $P_U(i)$  y  $P_D(i)$  a partir de las expresiones (10) y (11). En segundo lugar construimos los árboles de precios de estado. A continuación, utilizando los factores de descuento (4) determinamos de forma simultánea los valores de los parámetros que nos sirven para calibrar el modelo. Por último, construimos el árbol para el tipo de interés a partir de los parámetros estimados, pudiendo calcular los valores de los factores de descuento (2) y (4)<sup>9</sup>.

## ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS ERRORES DE VALORACIÓN

### IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO BDT

La aplicación del modelo BDT requiere de la estimación previa de la curva cupón cero, o ETTI, observada en el mercado. En este trabajo seguimos el procedimiento de selección y depuración de datos propuesto por Díaz (2003) a partir de datos suministrados por la Central de Anotaciones del Banco de España. En concreto, la base de datos proporciona las cifras agregadas de negociación durante el día de todas las operaciones de compraventa simple al contado con cada activo de deuda del Estado en el mercado de deuda pública anotada. La estimación se realiza a partir de la adaptación al mercado español propuesta por Contreras et al. (1996) de la metodología de Vasicek y Fong (1982).

A partir de estas estimaciones de la ETTI, aplicamos la metodología BDT sobre la muestra diaria compuesta por 503 sesiones, 249 correspondientes a 1998 (desde el 02/01/1998 hasta el 31/12/1998) y 254 a 2001 (desde el 02/01/2001 hasta el 28/12/2001). En la construcción del árbol del tipo de interés consideramos intervalos de amplitud mensual<sup>10</sup>, es decir,  $\Delta t = 1$  mes, por lo que la ETTI está formada por los tipos de interés mensuales desde uno hasta ciento veinte meses.

Para cada día de nuestra muestra (D+0) estimamos la ETTI y calibramos el modelo BDT. A partir de los parámetros del modelo BDT valoramos bonos teóricos, cupón cero y con cupón periódico y con plazos comprendidos entre uno y diez años, a lo largo de los siete días hábiles siguientes al de calibración. Para cada uno de esos siete días (desde D+1 hasta D+7), la nueva ETTI observada se introduce en el modelo BDT pero no se recalibran los parámetros (siguen siendo los correspondientes a D+0). Calculamos los precios de los bonos teóricos a partir de la ETTI del día y sus precios a partir del modelo BDT sin recalibrar. A partir de estos precios obtenemos un conjunto de errores en TIR, los cuales analizamos en función del número de sesiones transcurridas desde la calibración, el tipo y amplitud del movimiento de los tipos de interés entre ambas fechas y de las características del bono, plazo y cuantía del cupón.

La implementación de la versión del modelo BDT con volatilidad dependiente del plazo exige la estimación de las volatilidades de los tipos de interés correspondientes a cada plazo. Estas volatilidades se han calculado como las desviaciones típicas de los tipos de interés al contado. Para ello se determinan las volatilidades diarias a partir de una media móvil de las últimas sesenta observaciones de los tipos de interés para el plazo correspondiente. Estas volatilidades diarias se transforman en mensuales a partir de siguiente relación

$$\sigma_{\text{mensual}} = \sigma_{\text{diaria}} \sqrt{n} \quad (12)$$

donde  $n$  es el número promedio de días hábiles contenidos en un mes, que en el trabajo hemos supuesto que son 20.

El modelo se ha desarrollado en una hoja de cálculo con los cuatro árboles binomiales necesarios ( $R$ ,  $Q_U$ ,  $Q_D$  y  $Q$ ) y, mediante un programa en Visual Basic para Aplicaciones, se obtienen los valores óptimos de los parámetros,  $U(i)$  y  $\sigma(i)$ , respetando las restricciones que surgen de las relaciones analizadas en el apartado anterior. Las estimaciones de la ETTI proporcionan los tipos de interés al contado hasta el plazo de 10 años y la amplitud de los intervalos  $\Delta t$  es mensual, por lo que para cada estimación de los parámetros del modelo BDT se han construido cuatro árboles divididos en 120 periodos mensuales. El modelo se calibra para cada una de las estimaciones diarias de la estructura temporal de tipos de interés. Disponemos, por tanto, de 503 calibraciones del modelo, una para cada estimación de la ETTI.

### ESTIMACIÓN DE LOS ERRORES DE VALORACIÓN

Por construcción, el modelo calibrado es consistente con la ETTI y con la estructura temporal de volatilidades. Ello implica que el modelo replica con total exactitud la ETTI utilizada como *input*. Sin embargo, con el paso del tiempo se producirán movimientos en los tipos de interés que hacen que la nueva ETTI difiera de la ETTI de partida. La consecuencia inmediata que se deriva de esto es que el modelo BDT ya no se ajusta con total exactitud a los tipos de interés de la

nueva ETTI, puesto que los parámetros están calibrados respecto de la ETTI inicial.

Lo que nos cuestionamos en primer lugar es con qué frecuencia sería necesario recalibrar el modelo para que éste valore los activos financieros con una precisión aceptable, si bien es cierto que, conforme varía la ETTI, la valoración de los activos derivados de los tipos de interés pierde precisión. Por tanto, tratamos de cuantificar la pérdida de exactitud en la valoración al transcurrir el tiempo.

Los errores de valoración en precios se obtienen como diferencia entre el precio de un bono teórico, calculado a partir de la estructura temporal observada, y su precio determinado a partir del modelo BDT calibrado en una fecha anterior. Como bonos teóricos utilizamos bonos cupón cero y bonos con cupón periódico del 4,75% anual<sup>11</sup>, ambos libres de riesgo de insolvencia y de liquidez, con vencimientos comprendidos entre uno y diez años. De esta forma, trabajamos con veinte bonos teóricos.

Por tanto, el procedimiento seguido en la obtención de los errores de valoración consiste en calibrar el modelo BDT, obteniendo los valores de los parámetros  $U(i)$  y  $\sigma(i)$  que hacen consistente el modelo con la ETTI estimada para una fecha determinada. Manteniendo constantes esos parámetros  $U(i)$  y  $\sigma(i)$ , se sustituye el tipo de interés instantáneo por el de la sesión siguiente, con lo que se obtienen nuevos precios de estado<sup>12</sup>. Dada la inestabilidad de los tipos de interés a muy corto plazo, utilizamos como *proxy* del tipo instantáneo el tipo de interés al contado que proporciona la ETTI para el plazo de un mes. Con los precios de estado obtenidos, calculamos el precio de los bonos en esa nueva fecha y también su TIR. De la comparación de la TIR que se deduce de la ETTI observada correspondiente con la TIR de cada bono según el modelo BDT, obtenemos los errores de valoración para los veinte bonos considerados.

$$error_{hdt} = y_{hdt} - y_{hdt}^{BDT} \quad (13)$$

donde  $error_{hdt}$  es el error en TIR expresado en puntos básicos (p.b.) cometido al aplicar el modelo BDT  $d$  días después de la fecha de calibración  $t$  para valorar el bono  $h$ ;  $y_{hdt}$  es la TIR real del bono  $h$  en la fecha  $t+d$ ; e  $y_{hdt}^{BDT}$  es la TIR del bono según el modelo BDT.

Estos cálculos se repiten con los tipos de interés instantáneos de las siete sesiones consecutivas a la de calibración y para los veinte tipos de bonos considerados. El procedimiento descrito se aplica para cada una de las 503 estimaciones de la ETTI. De esta forma nuestra muestra de datos está compuesta por 70.420 errores en TIR<sup>13</sup>.

## RESULTADOS

La figura 1 muestra la evolución del valor promedio de los errores de valoración en TIR durante los años 1998 (parte superior) y 2001 (parte inferior), a lo largo de los siete días posteriores a la calibración del modelo BDT. Los estadísticos que se muestran son los correspondientes a los bonos cupón cero (los correspondientes a los bonos con cupón presentan una evolución muy similar).

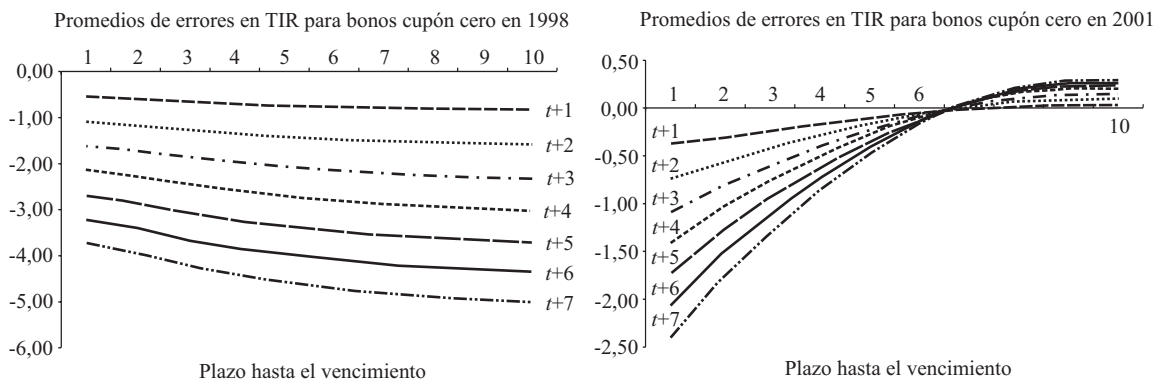
En promedio, los errores cometidos en 1998 son negativos y decrecientes tanto con el número de días como con el vencimiento. Para los bonos cupón cero con vencimiento en un año, los errores en TIR se reducen de -0,56 puntos básicos (p.b.) un día después de la calibración a -3,73 p.b. cuando han transcurrido siete días. En el caso de bonos con plazo de diez años, el promedio varía desde -0,84 hasta -5,01 puntos básicos.

Si atendemos ahora al año 2001, observamos una evolución del error promedio muy diferente. Los errores son negativos a la hora de valorar bonos cupón cero con vencimientos a corto y medio plazo, hasta seis años, incrementándose tanto con los días transcurridos como con el vencimiento (es decir, haciéndose cada vez menos negativos y más cercanos a cero). Para vencimientos comprendidos entre siete y diez años, el error promedio es positivo, y se incrementa con el vencimiento y los días transcurridos desde la calibración. Esto es, el error promedio en TIR para bonos a los que les resta un (diez) año(s) hasta el vencimiento es de -0,38 p.b. (0,03 p.b.) un día después de la fecha de calibración y -2,40 p.b. (0,29 p.b.) cuando han transcurrido siete días. En promedio, los errores cometidos para los bonos que pagan cupón son ligeramente inferiores que para los bonos cupón cero. Esta diferencia se incrementa en los bonos con mayor plazo hasta vencimiento.

La tabla 1 muestra las desviaciones típicas de los errores en TIR. En general, podemos obser-

**Figura 1.-** Representación gráfica de los errores en TIR promedios en función del número de días transcurridos desde la calibración y del plazo hasta el vencimiento del bono para 1998 y 2001

Error en TIR es la diferencia entre la TIR real del bono  $h$  en la fecha  $t+d$  menos la TIR del bono según el modelo BDT  $d$  días después a la fecha de calibración  $t$ , todo ello multiplicado por 10.000 para expresar la diferencia en puntos básicos.



**Tabla 1.-** Desviaciones típicas de los errores en TIR en función del número de días transcurridos desde la calibración y del plazo hasta el vencimiento del bono

Error en TIR es la diferencia entre la TIR real del bono  $h$  en la fecha  $t+d$  menos la TIR del bono según el modelo BDT  $d$  días después a la fecha de calibración  $t$ , todo ello multiplicado por 10.000 para expresar la diferencia en puntos básicos.

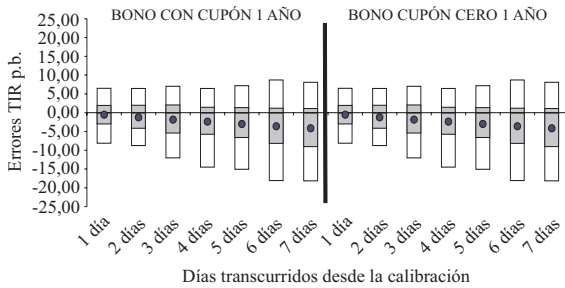
PLAZO	BONOS CUPÓN CERO							BONOS CON CUPÓN ANUAL DEL 4,75%						
	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7
AÑO 1998:														
1	5,22	5,97	6,48	6,90	7,67	8,37	8,84	5,22	5,97	6,48	6,90	7,67	8,37	8,84
2	4,93	5,72	6,55	7,23	7,63	8,62	8,92	4,90	5,69	6,52	7,19	7,60	8,59	8,89
3	5,08	5,98	6,79	7,52	7,79	8,81	9,07	5,03	5,92	6,73	7,45	7,74	8,75	9,01
4	5,05	6,16	6,94	7,68	8,04	8,98	9,28	5,00	6,08	6,87	7,60	7,95	8,89	9,19
5	5,03	6,32	7,13	7,90	8,40	9,28	9,62	4,97	6,22	7,03	7,79	8,26	9,15	9,48
6	5,04	6,48	7,36	8,19	8,80	9,65	10,02	4,97	6,35	7,21	8,02	8,60	9,46	9,81
7	5,06	6,61	7,60	8,48	9,18	10,03	10,42	4,97	6,46	7,40	8,25	8,92	9,76	10,13
8	5,08	6,73	7,83	8,75	9,52	10,38	10,78	4,98	6,54	7,58	8,46	9,19	10,03	10,41
9	5,14	6,86	8,09	8,99	9,82	10,69	11,10	5,01	6,62	7,77	8,65	9,41	10,27	10,64
10	5,36	7,07	8,41	9,25	10,14	11,02	11,42	5,14	6,75	7,99	8,82	9,64	10,49	10,86
AÑO 2001:														
1	5,01	6,58	8,59	9,94	11,42	12,43	13,58	5,01	6,58	8,59	9,94	11,42	12,43	13,58
2	4,64	6,68	8,47	9,92	11,18	12,27	13,28	4,62	6,66	8,45	9,90	11,17	12,26	13,27
3	4,45	6,49	8,14	9,47	10,62	11,64	12,58	4,43	6,47	8,13	9,47	10,63	11,65	12,59
4	4,16	6,21	7,77	9,01	10,10	11,05	11,92	4,15	6,20	7,77	9,03	10,12	11,08	11,96
5	3,96	6,02	7,52	8,70	9,73	10,63	11,45	3,96	6,01	7,52	8,72	9,76	10,66	11,50
6	3,85	5,90	7,37	8,50	9,49	10,35	11,13	3,83	5,88	7,36	8,51	9,51	10,37	11,16
7	3,74	5,78	7,24	8,34	9,30	10,13	10,89	3,72	5,75	7,22	8,33	9,30	10,13	10,90
8	3,58	5,59	7,06	8,15	9,10	9,91	10,67	3,55	5,56	7,03	8,13	9,09	9,90	10,67
9	3,43	5,39	6,85	7,95	8,91	9,71	10,48	3,39	5,36	6,82	7,92	8,88	9,68	10,45
10	3,42	5,28	6,71	7,82	8,81	9,62	10,36	3,32	5,21	6,65	7,74	8,72	9,52	10,28

var que la variabilidad de los errores es mayor para 2001 que para 1998, excepto para los bonos de mayor plazo. En las figuras 2 a 5 presentamos la distribución en percentiles de los errores en TIR para los vencimientos de uno, tres, cinco y diez años, tanto para los bonos cupón cero como para los bonos que pagan cupón anual del 4,75%, en función del número de sesiones que han transcurrido desde la calibración del modelo (desde 1 día hasta 7 días).

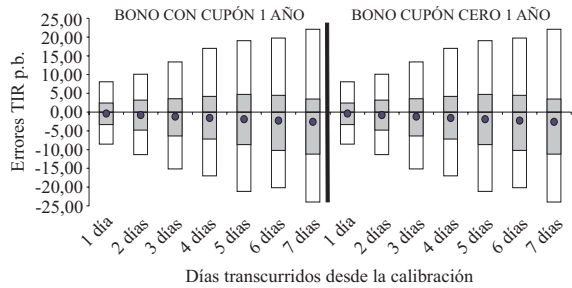
Para los bonos con cupón de plazo igual al año (figuras 2.1-2.2) observamos cómo el 95% de los errores, cuando ha transcurrido un día tras la calibración, no superan los 10 p.b. en ninguna de las dos muestras. Los errores de no calibrar el modelo BDT se incrementan conforme valoramos en días sucesivos, pero lo hacen en mayor cuantía en 2001, de manera que a los siete días los errores se mueven entre 8,09 y -18,14 p.b. en 1998, y entre 22,09 y -23,95 p.b. en 2001.

**Figura 2.-** Distribución en percentiles de los errores de valoración en TIR para bonos con vencimiento un año

**Figura 2.1.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 1998

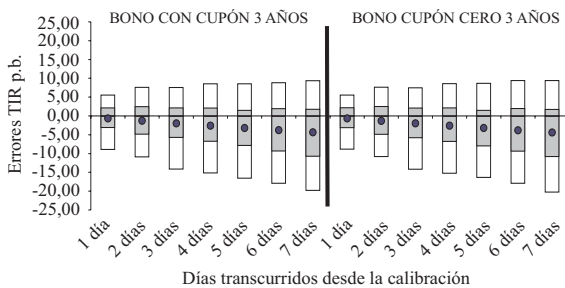


**Figura 2.2.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 2001

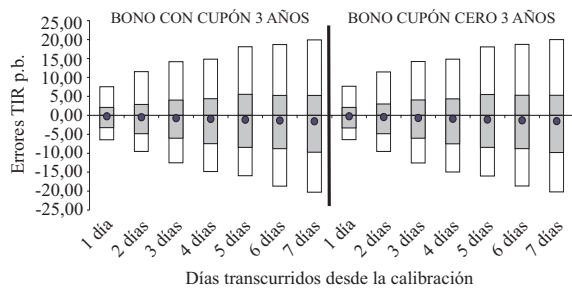


**Figura 3.-** Distribución en percentiles de los errores de valoración en TIR para bonos con vencimiento tres años

**Figura 3.1.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 1998

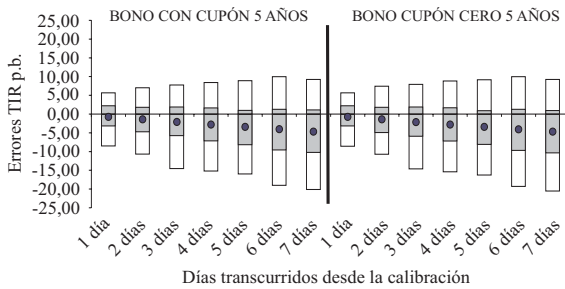


**Figura 3.2.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 2001

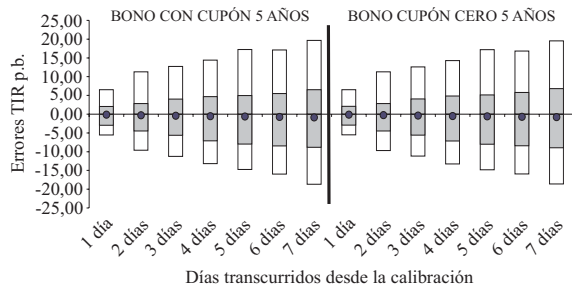


**Figura 4.-** Distribución en percentiles de los errores de valoración en TIR para bonos con vencimiento cinco años

**Figura 4.1.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 1998

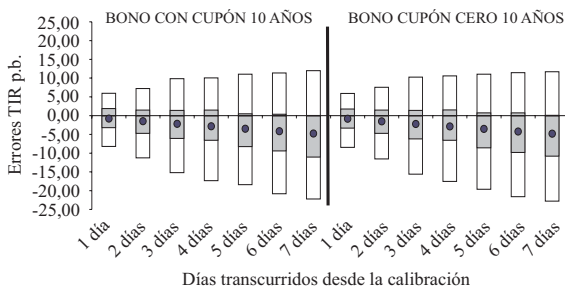


**Figura 4.2.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 2001

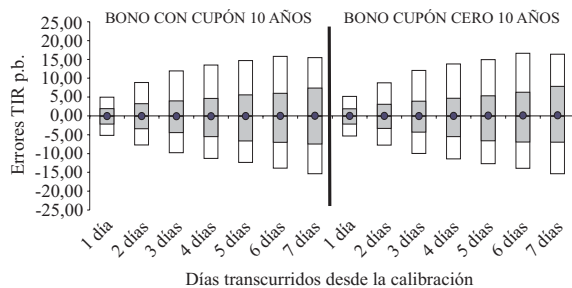


**Figura 5.-** Distribución en percentiles de los errores de valoración en TIR para bonos con vencimiento diez años

**Figura 5.1.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 1998



**Figura 5.2.-** Distribución en percentiles de los errores según el número de días transcurridos desde la calibración del modelo 2001



Conforme se incrementa el vencimiento de los bonos, mayores son los errores cometidos en 1998, aunque sucede lo contrario en 2001. Así, para los bonos de mayor plazo, esto es, diez años (figuras 5.1-5.2), los errores cometidos con el modelo BDT varían entre 11,97 y -22,19 p.b. en 1998, y 15,49 y -15,33 p.b. en 2001, siete días después de la fecha de calibración.

Respecto al análisis de la distribución en percentiles, hay que destacar que, en general, los errores cometidos en 1998 son predominantemente negativos, y su dispersión respecto del valor promedio es mayor que en 2001. Esta variabilidad aumenta con el plazo hasta el vencimiento, situación opuesta a la que se observa en 2001, periodo en el que además los errores promedio son negativos para los plazos cortos y positivos para los largos.

Basándonos en el análisis previo, para evaluar si el modelo BDT sin recalibrar valora con un nivel de precisión aceptable, es preciso fijar un límite de error permitido. Dicho umbral dependerá del propósito con el que se utilice el modelo (valoración o cobertura) y del tipo de activo que estemos valorando. En nuestro caso se trata de bonos, pero el modelo BDT, perteneciente al grupo de modelos denominados consistentes con la estructura temporal de los tipos de interés, se utiliza fundamentalmente para valorar derivados de renta fija, por lo que el mejor criterio para establecer límites en los errores que se pueden cometer al valorar es el del gestor que utiliza el modelo.

Si, por ejemplo, consideramos como aceptable un error máximo de +/-10 p.b. en la TIR del bono, llegaríamos a la conclusión de que es posible valorar con el modelo hasta dos días después de su calibración. Esto es así porque en ningún caso los errores superan este umbral el día después de la calibración, y los errores se sitúan en torno a dicho límite dos días después de la calibración.

## ANÁLISIS DE LOS FACTORES EXPLICATIVOS

### MODELO PROPUESTO

A partir del análisis descriptivo anterior, observamos cómo la evolución de los errores de

valoración en TIR es diferente según consideremos uno u otro periodo dentro de nuestra muestra (1998 ó 2001). En esta sección analizamos los principales factores que explican estas diferencias y la sensibilidad de los errores a los cambios en dichos factores.

Para ello proponemos un modelo que trata de explicar los errores de valoración originados por la aplicación del modelo BDT en una fecha posterior a la de calibración, cuando se han producido variaciones en la ETTI. Se trata de movimientos reales, ya que basamos nuestro análisis en la curva cupón cero observada durante los siete días siguientes a la fecha de calibración. El modelo se aplica para todo el periodo muestral y para todos los bonos considerados.

Consideramos para nuestro análisis los tres componentes que, según la literatura, definen la ETTI: nivel, pendiente y curvatura. Así, la hipótesis de partida es que el grado de variación de los factores es de diferente intensidad durante los dos periodos muestrales considerados, con lo que explicaríamos los distintos resultados obtenidos para los años 1998 y 2001.

Además de las variaciones producidas en las variables nivel, pendiente y curvatura de la ETTI, consideramos dichas variables en niveles, junto con la volatilidad histórica de los tipos de interés en la fecha de calibración y el plazo hasta el vencimiento del bono<sup>14</sup>.

El modelo general propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned} error_{hdt} = & \beta_0 + \beta_1 \cdot volatilidad_t + \beta_2 \cdot nivel_t + \\ & + \beta_3 \cdot pendiente_t + \beta_4 \cdot curvatura_t + \\ & + \beta_4 \cdot \Delta nivel_{dt} + \beta_5 \cdot \Delta pendiente_{dt} + \\ & + \beta_6 \cdot \Delta curvatura_{dt} + \beta_7 \cdot d2_h + \beta_8 \cdot d3_h + \\ & + \beta_9 \cdot d4_h + \beta_{10} \cdot d5_h + \beta_{11} \cdot d6_h + \beta_{12} \cdot d7_h + \\ & + \beta_{13} \cdot d8_h + \beta_{14} \cdot d9_h + \\ & + \beta_{15} \cdot d10_h + \epsilon_{hdt} \end{aligned} \quad (14)$$

donde *volatilidad<sub>t</sub>* es la desviación típica asociada a los tipos de interés a un mes en la fecha de calibración *t*; *nivel<sub>t</sub>* viene dado por el tipo de interés correspondiente al plazo de un año en la sesión de calibración *t*; *pendiente<sub>t</sub>* se determina como diferencia entre el tipo de interés al contado a tres años menos el tipo de interés a tres meses<sup>15</sup>; *curvatura<sub>t</sub>* se obtiene como diferencia entre el tipo de interés a dos años menos el promedio de la suma de los tipos de interés a uno y tres

años<sup>16</sup>. Todas las variables explicativas aparecen expresadas en tantos por uno<sup>17</sup>.

Diferencias en nivel,  $\Delta nivel_{dt}$ , representa la variación del nivel de los tipos de interés a un año, y se calcula como la diferencia entre el tipo de interés del día de la calibración respecto al tipo de interés de la sesión que estemos considerando, es decir, la sesión  $d$  días posterior a la de calibración, correspondiente al error que tratamos de explicar. Las variaciones  $\Delta pendiente_{dt}$  y  $\Delta curvatura_{dt}$  han sido calculadas siguiendo el mismo criterio.

Adicionalmente, incluimos el plazo hasta el vencimiento en años del bono  $h$  como variable explicativa mediante variables ficticias ( $d2_h, d3_h, \dots, d10_h$ ). De esta forma,  $d2_h$  toma valor 1 cuando el bono  $h$  tiene un plazo hasta la amortización de dos años, y cero en otro caso.

Al mismo tiempo, proponemos un modelo alternativo que difiere del anterior únicamente en que las variables aparecen expresadas en valor absoluto. Con ellos pretendemos analizar la incidencia de los factores explicativos en la cuantía del error con independencia de su signo.

$$|error_{hdt}| = \beta_0 + \beta_1 \cdot volatilidad_t + \beta_2 \cdot nivel_t + \beta_3 \cdot pendiente_t + \beta_4 \cdot curvatura_t + \beta_5 \cdot |\Delta nivel_{dt}| + \beta_6 \cdot |\Delta pendiente_{dt}| + \beta_7 \cdot |\Delta curvatura_{dt}| + \beta_8 \cdot d2_h + \beta_9 \cdot d3_h + \beta_{10} \cdot d4_h + \beta_{11} \cdot d5_h + \beta_{12} \cdot d6_h + \beta_{13} \cdot d7_h + \beta_{14} \cdot d8_h + \beta_{15} \cdot d9_h + \beta_{15} \cdot d10_h + \epsilon_{hdt} \quad (15)$$

## RESULTADOS

La tabla 2 presenta el valor medio y la desviación típica de los errores y de las variables que se considera determinan dichos errores. Dichos estadísticos se han calculado para el total de la muestra, así como para los periodos muestrales de 1998 y 2001.

El error medio en TIR es de -1,5 p.b., siendo de -2,65 p.b. en 1998 y de -0,38 en 2001. Esto indica que el modelo BDT sin recalibrar tiende a ofrecer TIR mayores a las reales durante nuestro periodo muestral y, por tanto, a infravalorar el precio de los bonos. En los dos periodos analizados predominan los movimientos de los tipos de interés a la baja, especialmente en 1998 ante la

eminente entrada en la UEM. La columna diferencias en nivel entre el día de aplicación del modelo y el día de calibración en la tabla 2 así lo indica, siendo el promedio en valor absoluto de estas variaciones prácticamente el doble en el caso de 1998. La aplicación del modelo BDT sin recalibrar no permite recoger estos movimientos típicos del periodo, lo que podría generar TIR por encima de los reales.

La forma de la ETTI predominante es ligeramente creciente y convexa respecto al origen, como así indican el valor promedio de la pendiente (10,47 p.b.) y curvatura (-2,52 p.b.). En el año 1998 es más plana que en 2001. Además, el valor medio de las diferencias en nivel, pendiente y curvatura denota que los movimientos de las ETTI en 1998 son prácticamente paralelos, y más pronunciados los correspondientes a 2001. La tabla 3 muestra la evolución, a lo largo de las siete sesiones posteriores a la calibración, y para los años 1998 y 2001, de las variaciones promedio para las variables que suponemos determinan la ETTI.

La tabla 4 muestra el resultado de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios del modelo general y el modelo alternativo para toda la muestra (70.420 observaciones). Asimismo, en la tabla 5 aparece el resultado de la aplicación del modelo general restringiendo el tamaño muestral en función del plazo hasta el vencimiento de los bonos, por lo que el número de observaciones para cada estimación se reduce a 7.042. En estos casos, el modelo se estima sin las variables artificiales correspondientes al plazo.

El modelo general planteado explica aproximadamente el 64% de los errores en TIR (panel izquierdo de la tabla 4), frente al modelo alternativo, cuyo poder explicativo se reduce al 35%. Prácticamente todos los coeficientes estimados son significativamente distintos de cero, salvo  $\Delta curvatura$  y la variable ficticia correspondiente al plazo de dos años.

Los coeficientes estimados asociados a la *Volatilidad* presentan signo negativo en ambos modelos, lo que sugiere que cuanto mayor es la volatilidad histórica, menores son los errores en TIR. También son significativos los coeficientes asociados a las variables *Nivel*, *Pendiente* y *Curvatura*, que recogen la forma inicial de la ETTI. De esta forma, los *inputs* del modelo BDT

**Tabla 2.-** Descripción de la muestra

Error en TIR es la diferencia entre la TIR real del bono  $h$  en la fecha  $t+d$  menos la TIR del bono según el modelo BDT  $d$  días después de la fecha de calibración  $t$ , todo ello multiplicado por 10.000 para expresar la diferencia en puntos básicos. El resto de variables se expresan en el análisis en tanto por uno, aunque en esta tabla aparecen multiplicadas por 100, por lo que están expresadas en tanto por ciento.

	ERROR EN TIR	VOLATILIDAD $\times 100$	NIVEL $\times 100$	PENDIENTE $\times 100$	CURVATURA $\times 100$	$\Delta$ NIVEL $\times 100$	$\Delta$ PENDIENTE $\times 100$	$\Delta$ CURVATURA $\times 100$
TODA LA MUESTRA:								
Media	-1,50	0,8722	3,9152	0,1047	-0,0252	-0,0194	0,0083	0,0003
Desv.típ.	8,51	0,4941	0,4643	0,2782	0,0260	0,0905	0,1605	0,0169
Observ.	70.420	70.420	70.420	70.420	70.420	70.420	70.420	70.420
AÑO 1998:								
Media	-2,65	0,8450	3,8401	0,0530	-0,0300	-0,0230	0,0006	0,0000
Desv.típ.	8,06	0,4537	0,4126	0,2429	0,0290	0,0758	0,1494	0,0172
Observ.	34.860	34.860	34.860	34.860	34.860	34.860	34.860	34.860
AÑO 2001								
Media	-0,38	0,8989	3,9887	0,1554	-0,0205	-0,0158	0,0158	0,0007
Desv.típ.	8,78	0,5295	0,4991	0,3005	0,0218	0,1027	0,1703	0,0166
Observ.	35.560	35.560	35.560	35.560	35.560	35.560	35.560	35.560

**Tabla 3.-** Variaciones medias en la forma de la estructura temporal de los tipos de interés según días transcurridos desde la calibración

DÍAS DESDE CALIBRACIÓN	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$
AÑO 1998:							
$\Delta$ Nivel $\times 100$	-0,0060	-0,0117	-0,0176	-0,0232	-0,0289	-0,0343	-0,0395
$\Delta$ Pendiente $\times 100$	-0,0011	-0,0012	0,0006	0,0005	0,0009	0,0019	0,0026
$\Delta$ Curvatura $\times 100$	-0,0001	-0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
AÑO 2001:							
$\Delta$ Nivel $\times 100$	-0,0042	-0,0083	-0,0122	-0,0159	-0,0195	-0,0233	-0,0271
$\Delta$ Pendiente $\times 100$	0,0031	0,0075	0,0118	0,0160	0,0201	0,0242	0,0280
$\Delta$ Curvatura $\times 100$	0,0000	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0012

en el momento de calibración, la volatilidad y la forma inicial de la ETTI influyen en el signo y cuantía de los errores de valoración en los que se incurre al utilizar el modelo BDT sin recalibrar. Estos errores se pueden reducir utilizando un valor para la volatilidad más elevado en la calibración inicial.

Los coeficientes asociados a  $\Delta nivel_{dt}$  y  $\Delta pendiente_{dt}$  son también significativos estadísticamente, y muestran que, por cada punto básico de incremento en el nivel o la pendiente, entre el momento de la calibración y el momento en el que el modelo BDT se utiliza para valorar, el error en TIR aumentará 0,70 p.b. (generado por  $\Delta nivel_{dt}$ ) o 0,25 p.b. (motivado por  $\Delta pendiente_{dt}$ ). Por su parte, los coeficientes estimados para las variables ficticias correspondientes al vencimiento de los bonos sugieren que los errores en TIR se incrementan ligeramente con la fecha de amortización de los bonos.

Los resultados obtenidos para el modelo alternativo (tabla 4; panel derecho) indican que los errores en TIR expresados en valor absoluto son

menores cuanto mayores son el nivel y la volatilidad que se utilizan como entradas del modelo. Por el contrario, cuando la ETTI inicial presenta una mayor curvatura y sus movimientos son de mayor magnitud, mayores son los errores.

La tabla 5 muestra los parámetros estimados para diez submuestras en función del plazo hasta el vencimiento de los bonos. El valor del coeficiente de determinación ajustado varía desde el 99% para bonos con plazo igual a un año hasta el 43% para los bonos a diez años<sup>18</sup>. La figura 6 representa la evolución de los parámetros estimados; en la parte superior aparecen los parámetros correspondientes a las variables que describen la situación en el momento de la calibración. El efecto sobre los errores en TIR es mayor para los bonos que vencen a medio y a largo plazo, siendo la pendiente y la curvatura las variables que tienen un mayor impacto sobre los errores cometidos. Una volatilidad inicial más elevada genera errores en TIR negativos y, consecuentemente, una infravaloración de los bonos. Esta infravaloración es menos perjudicial en lo refe-

**Tabla 4.-** Errores en TIR en función de los determinantes de la estructura temporal de los tipos de interés y del vencimiento del bono

Modelo general (errores en TIR):

$$error_{hdt} = \beta_0 + \beta_1 \cdot volatilidad_t + \beta_2 \cdot nivel_t + \beta_3 \cdot pendiente_t + \beta_4 \cdot curvatura_t + \beta_5 \cdot \Delta nivel_{dt} + \beta_6 \cdot \Delta pendiente_{dt} + \beta_7 \cdot \Delta curvatura_{dt} + \beta_8 \cdot d2_h + \beta_9 \cdot d3_h + \beta_{10} \cdot d4_h + \beta_{11} \cdot d5_h + \beta_{12} \cdot d6_h + \beta_{13} \cdot d7_h + \beta_{14} \cdot d8_h + \beta_{15} \cdot d9_h + \beta_{16} \cdot d10_h + \epsilon_{hdt} \quad (14)$$

Modelo alternativo (errores en TIR en valor absoluto):

$$|error_{hdt}| = \beta_0 + \beta_1 \cdot volatilidad_t + \beta_2 \cdot nivel_t + \beta_3 \cdot pendiente_t + \beta_4 \cdot curvatura_t + \beta_5 \cdot |\Delta nivel_{dt}| + \beta_6 \cdot |\Delta pendiente_{dt}| + \beta_7 \cdot |\Delta curvatura_{dt}| + \beta_8 \cdot d2_h + \beta_9 \cdot d3_h + \beta_{10} \cdot d4_h + \beta_{11} \cdot d5_h + \beta_{12} \cdot d6_h + \beta_{13} \cdot d7_h + \beta_{14} \cdot d8_h + \beta_{15} \cdot d9_h + \beta_{16} \cdot d10_h + \epsilon_{hdt} \quad (15)$$

La variable  $error_{hdt}$  está expresada en puntos básicos mientras que el resto de variables aparecen expresadas en tantos por uno. Así, por ejemplo, si la TIR de un bono según el modelo BDT es del 3,10%, su TIR real del 3,05% y el tipo de interés al contado para el plazo de un año es del 3,5%, tendríamos  $error_{hdt} = -5$  y  $nivel_t = 0,035$ .

La estimación se realiza utilizando la matriz de varianzas y covarianzas consistente con la heteroscedasticidad y autocorrelación propuesta por Newey-West. Estimación para toda la muestra (70.420 observaciones).

VARIABLE	MODELO GENERAL		MODELO ALTERNATIVO (variables en valor absoluto)	
	Coficiente	t-Student	Coficiente	t-Student
Constante	-4,66	(-9,60)	9,20	(22,18)
Volatilidad	-166,26	(-19,70)	-96,42	(-12,66)
Nivel	104,05	(10,59)	-136,92	(-16,01)
Pendiente	594,65	(31,88)	39,56	(2,07)
Curvatura	-3.141,82	(-17,16)	1.466,08	(8,33)
$\Delta$ Nivel	7.025,32	(232,80)	4.912,55	(102,01)
$\Delta$ Pendiente	2.546,70	(84,91)	267,22	(7,29)
$\Delta$ Curvatura	349,02	(1,14)	1.950,44	(5,94)
d2	0,11	(1,86)	0,10	(1,63)
d3	0,17	(2,69)	0,07	(1,06)
d4	0,23	(3,36)	-0,04	(-0,56)
d5	0,29	(3,92)	-0,10	(-1,47)
d6	0,34	(4,34)	-0,12	(-1,67)
d7	0,37	(4,44)	-0,13	(-1,87)
d8	0,39	(4,48)	-0,17	(-2,28)
d9	0,40	(4,34)	-0,18	(-2,39)
d10	0,38	(4,02)	-0,17	(-2,14)
R <sup>2</sup> Ajustado (%)	64,09		35,13	

**Tabla 5.-** Errores en TIR en función de los determinantes de la estructura temporal de los tipos de interés para distintas muestras en función del plazo hasta el vencimiento del bono para el modelo restringido

Modelo restringido (errores en TIR):

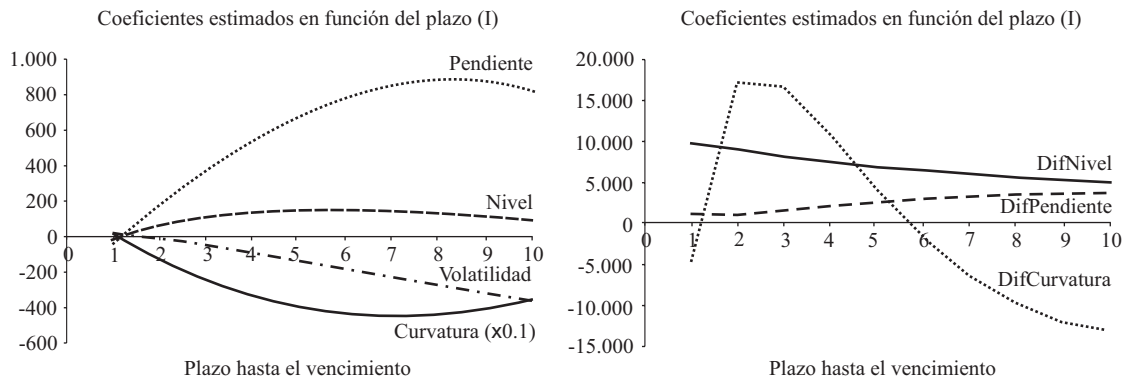
$$error_{hdt} = \beta_0 + \beta_1 \cdot volatilidad_t + \beta_2 \cdot nivel_t + \beta_3 \cdot pendiente_t + \beta_4 \cdot curvatura_t + \beta_5 \cdot \Delta nivel_{dt} + \beta_6 \cdot \Delta pendiente_{dt} + \beta_7 \cdot \Delta curvatura_{dt} + \epsilon_{hdt} \quad (14) *$$

La variable  $error_{hdt}$  está expresada en puntos básicos mientras que el resto de variables aparecen expresadas en tantos por uno. Así por ejemplo si la TIR de un bono según el BDT es del 3,10%, su TIR real del 3,05% y el tipo de interés al contado para el plazo de un año es del 3,5%, tendríamos  $error_{hdt} = -5$  y  $nivel_t = 0,035$ .

La estimación se realiza utilizando la matriz de varianzas y covarianzas consistente con la heteroscedasticidad y autocorrelación propuesta por Newey-West. Estimación para distintas muestras en función del plazo hasta el vencimiento del bono (7.042 observaciones cada muestra).

PLAZO	CONSTANTE	VOLATIL.	NIVEL	PENDIENTE	CURVAT.	$\Delta$ NIVEL	$\Delta$ PEND.	$\Delta$ CURVAT.	R <sup>2</sup> Aj. (%)
1	0,64 (3,03)	8,16 (1,80)	-14,73 (-3,45)	-34,25 (-4,85)	219,94 (2,89)	9.790,02 (825,99)	1.156,15 (82,55)	-4.272,50 (-38,15)	99,24
2	-3,12 (-7,18)	-0,07 (-0,01)	64,93 (7,45)	174,14 (11,24)	-1.386,46 (-8,00)	9.103,22 (393,73)	1.103,08 (39,70)	17.134,05 (71,57)	97,21
3	-5,09 (-6,15)	-42,37 (-3,01)	109,24 (6,49)	367,78 (11,62)	-2.420,19 (-7,29)	8.237,72 (179,25)	1.509,03 (30,13)	16.659,01 (34,18)	89,69
4	-5,98 (-5,30)	-92,58 (-4,87)	130,82 (5,70)	537,67 (12,32)	-3.264,17 (-7,48)	7.546,08 (122,08)	2.043,23 (30,50)	10.890,62 (16,50)	80,22
5	-6,28 (-4,69)	-143,82 (-6,31)	140,10 (5,16)	679,40 (12,92)	-3.902,91 (-7,68)	6.980,34 (94,42)	2.545,85 (31,09)	4.442,68 (5,53)	70,73
6	-6,16 (-4,10)	-193,21 (-7,50)	141,01 (4,64)	787,13 (13,19)	-4.310,27 (-7,56)	6.501,58 (77,82)	2.969,15 (32,36)	-1.339,61 (-1,48)	62,66
7	-5,72 (-3,47)	-239,51 (-8,45)	135,72 (4,08)	856,34 (13,52)	-4.468,92 (-7,33)	6.079,29 (67,40)	3.295,27 (32,65)	-6.019,59 (-6,05)	56,43
8	-5,02 (-2,89)	-282,09 (-9,26)	125,68 (3,59)	883,54 (13,75)	-4.369,39 (-6,94)	5.691,89 (60,75)	3.518,01 (33,51)	-9.460,87 (-9,18)	51,70
9	-4,12 (-2,34)	-320,81 (-10,03)	112,02 (3,16)	870,55 (13,15)	-4.028,95 (-6,28)	5.330,37 (54,91)	3.643,08 (34,06)	-11.698,84 (-11,08)	47,73
10	-3,06 (-1,68)	-356,31 (-10,79)	95,69 (2,60)	824,16 (11,75)	-3.486,90 (-5,24)	4.992,72 (48,82)	3.684,19 (33,31)	-12.844,75 (-11,90)	43,75

**Figura 6.-** Coeficientes estimados en las regresiones del modelo restringido (14) que aparecen en la tabla 5



rente a la gestión de carteras de renta fija que una sobrevaloración. Así, el modelo BDT sin recalibrar podría ser mantenido durante un periodo más dilatado cuando la ETTI inicial presenta un menor nivel y pendiente, junto con valores elevados para la curvatura y la volatilidad histórica, especialmente para bonos a medio y largo plazo.

El panel derecho de la figura 6 ilustra las variables que describen movimientos de la ETTI respecto de su forma inicial. La relación entre el plazo hasta vencimiento y los incrementos en nivel y pendiente es prácticamente lineal, mientras que tiene forma de joroba en el caso de las variaciones en curvatura. Los coeficientes estimados son positivos salvo el correspondiente a la variable  $\Delta curvatura_{dt}$  para bonos que vencen a medio y largo plazo. Así, incrementos en nivel, pendiente y curvatura producen errores en TIR positivos, que son los errores que más preocupan a los gestores de carteras, ya que implican una sobrevaloración de los precios de los bonos, especialmente de aquellos que vencen en el corto plazo. Pero son los incrementos en la curvatura los que tienen mayor efecto sobre los errores en TIR, aunque son de signo negativo en los bonos que tienen un mayor plazo hasta la amortización.

Visto lo anterior, llegamos a la conclusión de que las diferencias observadas en función del periodo muestral (1998 ó 2001) en los errores en TIR se pueden explicar por las diferencias en la forma de la ETTI inicial y los movimientos de distinta intensidad que tienen lugar entre la fecha de calibración del modelo BDT y el momento en que BDT se utiliza para valorar.

### CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo consiste en analizar los factores de los que depende la frecuencia óptima de recalibración del modelo de Black, Derman y Toy (1990), es decir, el tiempo que se puede mantener el modelo sin recalibrar sin que ello genere errores de valoración significativos. Para ello contrastamos los factores que determinan la cuantía de los errores de valoración en TIR y, por tanto, la estabilidad de la calibración inicial.

En este sentido, implementamos el modelo a partir de la ETTI diaria estimada para operaciones de compraventa simple al contado con deuda del Estado en el mercado de deuda pública anotada español durante los periodos muestrales 1998 y 2001. Con los parámetros resultantes de la calibración, aplicamos el modelo para valorar bonos con distinto cupón y plazo durante las siete sesiones siguientes a la de calibración, generando errores de valoración en TIR.

Fijando un límite de error máximo permitido de +/-10 p.b. en la TIR del bono, el modelo BDT sin recalibrar valora con un nivel de precisión aceptable hasta dos días después de su calibración. Este resultado varía ligeramente en función del periodo muestral y del plazo hasta vencimiento del bono. Así, proponemos un modelo con la finalidad de analizar los factores de los que depende la estabilidad de las calibraciones.

Observamos cómo la conveniencia de implementar el modelo BDT sin recalibrar cuando se han producido movimientos en los tipos de interés desde la fecha de calibración depende principalmente de los cambios que se hayan producido en el nivel, la pendiente y la curvatura de la

ETTI. También influyen la forma inicial de la ETTI y la volatilidad introducidas como *inputs* del modelo, además del plazo hasta la amortización de los activos que estemos valorando. El modelo que hemos propuesto permite determinar la conveniencia de recalibrar el modelo BDT, ante una variación de los tipos de interés, en función de la forma inicial de la ETTI y de la magnitud y el tipo de movimiento de ésta. Así, por cada punto básico de incremento en el nivel o la pendiente, entre el momento de la calibración y el momento en el que el modelo BDT se utiliza para valorar, el error en TIR aumentará 0,70 o 0,25 p.b. respectivamente.

Las conclusiones que podemos destacar son que la frecuencia de recalibración del modelo BDT aplicado a la gestión de carteras puede reducirse cuando la ETTI inicial presenta valores bajos para el nivel y la pendiente, y altos para la curvatura y la volatilidad histórica. Es más, el modelo BDT sin recalibrar se puede utilizar durante un periodo más largo en el caso en que los movimientos en los tipos de interés que se hayan producido a partir del momento de la calibración hagan más plana la ETTI. Por su parte, los movimientos producidos en la curvatura de la ETTI suelen producir el mayor impacto en los errores en TIR, aunque dicho efecto es menos adverso en bonos que vencen a largo plazo.

## NOTAS

- Una versión preliminar de este trabajo ha sido publicado con el título *El modelo de Black, Derman y Toy en la práctica. Aplicación al mercado español* como Documento de Trabajo núm. 187 de FUNCAS. Agradecemos los valiosos comentarios y sugerencias de los dos evaluadores anónimos, así como los útiles comentarios recibidos en versiones anteriores por dos evaluadores anónimos de la serie Documentos de Trabajo de FUNCAS, por Eliseo Navarro, Eva Ferreira, Pedro Gento, Juan Nave, Gregorio Serna y Gloria M. Soto y los participantes en las *Jornadas de Estructura Temporal de los Tipos de Interés* (Cuenca, 2003). Este trabajo también se ha beneficiado de ayuda económica procedente de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, PAC-02-001 y PAI-05-074. En cualquier caso, todo error es imputable únicamente a los autores.
- En ocasiones utilizan los precios de los *swaps* de tipos de interés.
- Yan (2001) proporciona una revisión reciente de los principales modelos sobre la dinámica de la estructura temporal.
- Dentro de éstos se incluyen desde títulos cupón cero, o emitidos al descuento, hasta productos financieros derivados sobre tipos de interés con distinto grado de complejidad (opciones, futuros, *warrants*, *swaps*...), pasando por bonos y obligaciones con cupón periódico.
- Véase, por ejemplo, Jackson y Staunton (2001, p. 223): "The BDT Tree, a Development of the Simple Lognormal Tree, is the Most Popular Choice Amongst Practitioners, (...)".
- Los resultados son trasladables a la valoración de otros activos, adaptando los cálculos a los títulos que se desean analizar.
- La simulación proporciona una mayor variedad de formas de la ETTI y de movimientos de los tipos de interés. No obstante, muchas de estas combinaciones pueden estar muy alejadas de la realidad. Así preferimos analizar combinaciones reales. Seleccionamos los años 1998 y 2001 porque presentan la mayor variabilidad de formas dentro del pasado reciente.
- Entre ellos destacamos Jara (2002), que aplica una versión del modelo de Ho y Lee al mercado de bonos. Entre otros estudios realizados en el mercado español con modelos de estructura temporal de los tipos de interés no consistentes encontramos el de Moreno (2000), que analiza la capacidad de los modelos de la ETTI en tiempo continuo para ajustar los tipos de interés observados y valorar activos derivados, y Rico (1999), que contrasta la validez del modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) en el mercado español de deuda pública.
- Véase en Skinner (2005, pp. 106-119) un ejemplo detallado de la implementación del modelo BDT.
- En la literatura es habitual utilizar esta amplitud mensual. Así, por ejemplo, Skinner y Díaz (2003) la utilizan en una aproximación binomial para valorar activos derivados de crédito, que requiere de una calibración inicial de los tipos de interés libres de riesgo de insolvencia y de una calibración posterior del diferencial de insolvencia.
- Se ha escogido como valor del cupón el 4,75% por tratarse de la cuantía media de cupón pagado por los bonos españoles en los años que se analizan (1998 y 2001).
- Esto es, para generar el árbol para los tipos de interés en sesiones posteriores a la de calibración (*i*) introducimos el tipo de interés instantáneo corres-

- pendiente a la fecha de valoración ( $i+d$ ), pero manteniendo el valor de los parámetros de la sesión inicial, es decir, no recalibramos el modelo.
13. Calibramos el modelo para 503 días, por lo que tenemos 503 calibraciones $\times$ 7 días $\times$ 2 cuantías del cupón $\times$ 10 plazos hasta el vencimiento=70.420 datos.
  14. La inclusión de la variable ficticia "Cupón", que toma valor uno en el caso de bonos con cupón periódico y cero para los bonos cupón cero, no modifica el resultado final en ninguna de las muestras, siendo siempre no significativa estadísticamente. Estos resultados están disponibles previa petición a los autores.
  15. En la elección de los plazos de los tipos a largo y a corto se han seguido los resultados de Navarro y Nave (1997).
  16. Las variables *Pendiente* y *Curvatura* se obtienen como aproximación discreta a la derivada de primer y segundo orden respectivamente de la función que describe la ETTI. Partiendo de los tipos correspondientes a los tres vencimientos considerados  $\{r_{3m,t}, r_{2a,t}, r_{3a,t}\}$ , y suponiendo que los intervalos de tiempo entre ellos son constantes, el promedio de las dos posibles primeras diferencias que podemos calcular es  $(r_{3a,t} - r_{3m,t})/2$ . De esta expresión obviamos la constante y obtenemos la *Pendiente<sub>t</sub>*. Si multiplicamos la segunda diferencia de tipos  $[(r_{3a,t} - r_{2a,t}) - (r_{2a,t} - r_{3m,t})]$  por la constante  $-1/2$ , obtenemos la expresión de la *Curvatura<sub>t</sub>* =  $r_{2a,t} - (r_{3m,t} + r_{3a,t})/2$ . (Agradecemos esta explicación matemática sugerida por uno de los evaluadores).
  17. Así por ejemplo si la TIR de un bono según el BDT es del 3,10%, su TIR real del 3,05% y el tipo de interés al contado para el plazo de un año es del 3,5%, tendríamos  $error_{ndt} = -5$  y  $nivel_t = 0,035$ .
  18. El tipo de interés de referencia para calcular el nivel, la pendiente y la curvatura es el tipo a corto. Esto podría afectar a la evolución del coeficiente de determinación ajustado.
- Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, vol. 46, núm. 1, pp. 33-39.
- BLACK, F.; KARASINSKI, P. (1991): "Bond and Option Pricing When Short-term Rates are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, vol. 47, núm. 4, pp. 52-59.
- BENNINGA, S.; WIENER, Z. (1998): "Binomial Term Structure Models", *Mathematica in Education and Research*, vol. 7, núm. 3, pp. 11-19.
- BOYLE, P.; TAN, K.S.; TIAN, W. (2001): "Calibrating the Black-Derman-Toy Model: Some Theoretical Results", *Applied Mathematical Finance*, vol. 8, núm. 1, pp. 27-48.
- BÜHLER, W.; UHRIG-HOMBURG, M.; WALTER, U.; WEBER, T. (1999): "An Empirical Comparison of Forward-rate and Spot-rate Models for Valuing Interest-rate Options", *The Journal of Finance*, vol. 54, núm.1, pp. 269-305.
- BUETOW JR., G.W.; HANKE, B.; FABOZZI, F.J. (2001): "Impact of Different Interest Rate Models on Bond Value Measures", *The Journal of Fixed Income*, vol. 11, núm. 3, pp. 41-53.
- CLELOW, L.; STRICKLAND, C. (2000): *Implementing Derivatives Models*. Chichester: John Wiley & Sons.
- CONTRERAS, D.; FERRER, R.; NAVARRO, E.; NAVE, J. M. (1996): "Análisis factorial de la estructura temporal de los tipos de interés en España", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 25, núm. 86, pp. 139-160.
- COX, J.; INGERSOLL, J.; ROSS, S. (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, núm. 2, pp. 385-407.
- DE LA GRANDVILLE, O. (2001): *Bond Pricing and Portfolio Analysis (Protecting Investors in the Long Run)*. Cambridge: The Mit Press.
- DÍAZ, A. (2003): [www.uclm.es/areas/aef/webettis.htm](http://www.uclm.es/areas/aef/webettis.htm).
- FABOZZI, F. J. (2002): *Interest Rate, Term Structure and Valuation Modeling*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- FERGUSON, R.; RAYMAR, S. (1998): "A Comparative Analysis of Several Popular Term Structure Estimation Models", *The Journal of Fixed Income*, vol. 7, núm. 4, pp. 17-33.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates" *Econometrica*, vol. 60, núm. 1, pp. 77-105.
- HO, J.; GOODMAN, L. (2003): "Interest Rates-normal or Lognormal?" *The Journal of Fixed Income*, vol. 13, núm. 2, pp. 33-45.
- HO, T.S.Y.; LEE, S.B. (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance*, vol. 41, núm. 5, pp. 1011-1029.

## BIBLIOGRAFÍA

- BACKUS, D.; FORESI, S.; ZIN, S. (1998): "Arbitrage Opportunities in Arbitrage-Free Models of Bond Pricing", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 16, núm. 1, pp. 13-26.
- BALI, T.; KARAGOZGLU, A.K. (1999): "Implementation of the BDT Model with Different Volatility Estimators: Applications to Eurodollar Futures Options", *Journal of Fixed Income*, vol. 8, núm. 4, pp. 24-34.
- BLACK F.; DERMAN, E.; TOY, W. (1990): "A One-factor Model of Interest Rates and its Application to

- HULL, J.C. (1997): *Options, Futures and other Derivatives*, New Jersey: Prentice Hall.
- HULL, J.; WHITE, A. (1990): "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, vol. 3, núm. 4, pp. 573-592.
- JACKSON, M.; STAUNTON, M. (2001): *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*. Chichester: John Wiley & Sons.
- JARA, J.R. (2002): "Marco conceptual de los modelos de ETTI bajo condiciones de no arbitraje", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 31, núm. 111, pp. 17-46.
- JAMSHIDIAN, F. (1991): "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models", *Journal of Fixed Income*, vol. 1, núm. 1, pp. 62-74.
- JARROW, R.A.; TURNBULL, S.M. (2000): *Derivative Securities*. Cincinnati: South-Western College Publishing.
- JEGADEESH, N.; TUCKMAN, B. (2000): *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*. New York: John Wiley & Sons.
- MENEU, V.; NAVARRO, E.; BARREIRA, M.T. (1992): *Análisis y gestión del riesgo de interés*. Barcelona: Ariel.
- MORALEDA, J.M.; PELSSER, A. (2000): "Forward Versus Spot Interest Rate Models of the Term Structure: An Empirical Comparison", *Journal of Derivatives*, vol. 7, núm. 3, pp. 9-21.
- MORENO, M. (2000) "Modelización de la ETTI: valoración de derivados y comportamiento empírico." *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 39, núm. 104, pp. 345-376.
- NAVARRO, E.; NAVE, J.M. (1997): "A Two-factor Duration Model for Interest Rates Risk Management", *Investigaciones Económicas*, vol. 21, núm. 1, pp. 55-74.
- NAVAS, J.F. (1999): "Consistent Versus Non-consistent Term Structure Models: Some Evidence from the Spanish Market", *Journal of Fixed Income*, vol. 9, núm. 3, pp. 42-60.
- RICO, P. (1999): "La ETTI en España: el modelo de Cox, Ingersoll y Ross", *Investigaciones Económicas*, vol. 23, núm. 3, pp. 451-470.
- SKINNER, F. (2005): *Pricing and Hedging Interest & Credit Risk Sensitive Instruments*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- SKINNER, F.; DÍAZ, A. (2003): "An Empirical Study of Credit Default Swaps", *Journal of Fixed Income*, vol. 13, núm. 1, pp. 28-38.
- VASICEK, O.A. (1977): "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, vol. 5, núm. 2, pp. 177-188.
- VASICEK, O.A.; FONG, H.G. (1982): "Term Structure Modelling Using Exponential Splines", *The Journal of Finance*, vol. 37, núm. 2, pp. 339-348.
- YAN, H. (2001): "Dynamic Models of the Term Structure", *Financial Analysts Journal*, vol. 57, núm. 4, pp. 60-76.